



Números Complejos (\mathbb{C})

Un complejo es un “par ordenado” de números reales. Así, si $z \in \mathbb{C}$ entonces $z = (a, b)$ con $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$, a recibe el nombre de parte real del complejo y b recibe el nombre de parte imaginaria de z. El conjunto \mathbb{C} de números complejos es:

$$\mathbb{C} = \{(a, b) / a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$$

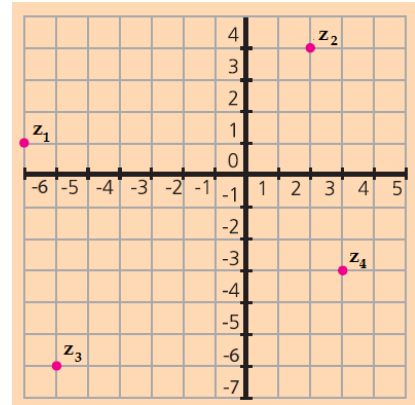
Es decir, es el conjunto de todos los pares ordenados de números reales

Representación Gráfica

Se puede asociar el conjunto de los números complejos (\mathbb{C}), con los puntos en un plano cartesiano. Para representar un número complejo mediante el sistema de ejes coordenados, se hace corresponder a z el punto del plano cuyas coordenadas se indican.

Por ejemplo, representemos gráficamente los complejos $z_1 = (-6, 1)$; $z_2 = (2, 4)$; $z_3 = (-5, -6)$ y $z_4 = (3, -3)$.

Es claro que a cada número complejo le corresponde un punto en el plano y que cada punto del plano se puede asociar a un número complejo.



Operaciones en \mathbb{C}

Sean z_1 y $z_2 \in \mathbb{C}$ con $z_1 = (a, b)$ y $z_2 = (c, d)$ definimos las operaciones de adición y multiplicación de la siguiente manera:

Adición: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

Multiplicación $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

Inverso Multiplicativo de un Complejo.

Si $z = (a, b)$, entonces se denomina inverso multiplicativo a $z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$, esto nos sirve para definir la división, ya que: $\frac{z}{w} = z \cdot w^{-1}$

Números Imaginarios

El número 1 es la unidad en los números Reales, y en forma compleja se escribe como $(1, 0)$. Esto quiere decir que construimos los demás números reales a partir de éste. De la misma forma si consideramos el conjunto formado por los números imaginarios puros, tendremos que todos los números se construyen a partir del $(0, 1)$. Sería lógico, llamar unidad imaginaria a este número. A esta unidad imaginaria la llamaremos i

Veamos una propiedad fundamental de i :

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1, 0) = -1$$

de donde $i = \sqrt{-1}$

Con esta propiedad ya tenemos resuelto el problema de las raíces cuadradas de números negativos, veamos como:

$$\sqrt{-7} = \sqrt{7 \cdot -1} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{7} i = (0, \sqrt{7})$$

Potencias de la Unidad Imaginaria

Sabiendo que...

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot -1 = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$$

$$i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot -1 = -1$$

Los valores se repiten de cuatro en cuatro, por eso, para saber cuánto vale una determinada potencia de i , se divide el exponente entre 4, y el resto corresponderá al exponente de la potencia dada.

Ejemplo:

$$i^{567} = i^3 = -i$$

$$\begin{array}{r} 567 : 4 = 141 \\ 16 \\ 07 \\ \underline{\underline{3}} \end{array}$$

Forma Canónica de un Complejo

Sean a y b números reales, definimos el número complejo z como:

$$z = (a, b) = a + bi. \text{ donde } i^2 = -1$$

Esta es la forma canónica de un número complejo z , donde a es la parte real y b es su parte imaginaria. Como se trata de un binomio tiene muchas ventajas respecto a la notación del complejo como par ordenado, ya que trabajar con los números complejos se reduce a trabajar con binomios en la forma usual y en la cual la novedad es que $i^2 = -1$.

Ejercicios:

Dados los complejos $z_1 = (1, 2)$; $z_2 = (-3, 6)$; $z_3 = (-9, -4)$; $z_4 = (8, -4)$. Determinar:

a. $z_1 + z_3 =$

b. $z_2 \cdot z_1 =$

c. $z_1 + z_2 - z_3 =$

d. $z_3 \cdot (z_2 - z_1) =$

e. $(z_4 - z_1) \cdot (z_3 - z_2) =$

f. $z_1^{-1} =$

g. $z_2^{-1} =$

h. $z_3^{-1} =$

i. $z_4^{-1} =$

j. $\frac{z_2}{z_1} =$

k. $\frac{z_4}{z_2} =$

l. $\frac{z_2 + z_3}{z_3} =$

m. $\frac{z_1 - z_4}{z_2 + z_3} =$

Efectúa las siguientes operaciones:

a. $(2 - 3i) \cdot (1 - i) =$

b. $(1 + 2i) - (3 + 2i) \cdot (1 - 2i) =$

c. $(1 - i)(1 - 2i) + (1 - 2i)(1 + 3i) =$

d. $(3 - i) + (2i - 4)(2i + 1) =$

e. $(2 + 5i) + (3 - 2i)(2i) =$

f. $(2i - 1)(i + 3) - (i + 4)(2i + 4) =$

g. $5i - (2i - 4) + 6i - (2i + 1) =$

h. $(2i + 7)(i + 4) - (2i + 3)(i + 2) =$

Determine:

a. $i^{123} =$

b. $i^{3240} =$

c. $i^{13} - i^{17} =$

d. $i^{24} + i^{400} + i^{1248} =$

e. $i^{15} \cdot \frac{i^{31}}{i^{72}} =$

f. $5i^{36} + 7i^{102} + i^{201} =$

g. $\frac{i^{21} + i^4 + i^{44}}{2 - i^9 + i^{10} - i^{19}} =$